



EIVIND ERIKSEN

Matematikk

FOR ØKONOMI OG FINANS

Eivind Eriksen

Matematikk for økonomi og finans

© CAPPELEN DAMM AS 2016

ISBN 978-82-02-47417-1

1. utgave, 1. opplag 2016

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med Cappelen Damm AS er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk.

Illustrasjoner: David Keeping

Grafisk formgiver: Kristine Steen

Omslagsdesign: Kristine Steen

Tekniske tegninger: Eivind Eriksen og bearbeiding Gamma grafisk AS (Vegard Brekke)

Forlagsredaktører: Wegard Kyoo Bergli

Sats: Gamma grafisk AS (Vegard Brekke)

Trykk og innbinding: AiT Bjerch AS

Forfatteren har mottatt støtte fra Det faglitterære fond.

www.cda.no

akademisk@cappelendamm.no

Forord

Denne læreboken er skrevet for kurset Matematikk for økonomer, matematikkfaget som inngår i bachelor-studiet i økonomi og administrasjon. Den dekker temaene i den nasjonale rammeplanen for dette studiet.

Læreboken er også tilpasset kurset Matematikk for siviløkonomer, som tilbys ved siviløkonomstudiet på Handelshøyskolen BI. Det dekker tilsvarende emner, men går litt grundigere til verks og inneholder også noen mer avanserte emner. Boken bør være godt egnet for siviløkonom- og finansstudier ved andre læresteder hvor studentene trenger en dypere forståelse for matematikk.

Oppgavene er en svært viktig del av enhver lærebok i matematikk, og jeg har forsøkt å inkludere mange oppgaver av varierende vanskelighetsgrad i boken. Løsningsforslag med løsning av alle oppgaver i boken planlegges utgitt i en egen oppgavebok.

Jeg underviste kurset Matematikk for siviløkonomer på Handelshøyskolen BI mens jeg arbeidet med denne læreboken, og jeg vil takke alle studentene som bidro til å rette opp trykkfeil, spesielt i oppgavene og løsningene av oppgavene. Jeg vil også takke forlagets konsulenter for mange nyttige kommentarer.

Oslo, 29. august 2016

Eivind Eriksen

Hvordan bruke denne læreboken

Når jeg skrev boken, ønsket jeg å legge til rette for en undervisningsplan som er noe annerledes enn den som er mest vanlig i dag. Tanken bak dette er å unngå at første semester kun er repetisjon av skolematematikken, og å komme raskere til stoff som er nytt og relevant for økonomistudiet.

Kapittel 0 om algebra og algebraiske uttrykk er ment som en kort repetisjon av de mest grunnleggende emnene og egner seg til selvstudium. Kjernestoffet i boken utgjør kapittel 1–7, og er ment å foreleses i kronologisk rekkefølge.

Undervisningsplan

Selvstudium	Kapittel 0: Algebra
Kjernestoff	Kapittel 1: Finansmatematikk
	Kapittel 2: Likninger og ulikheter
	Kapittel 3: Funksjoner og grafer
	Kapittel 4: Derivasjon
	Kapittel 5: Integrasjon
	Kapittel 6: Lineære likningssystemer og matriser
	Kapittel 7: Funksjoner i flere variabler

Mye av stoffet i kapittel 1–3 er også repetisjon av skolematematikken, og mange forelesere er vant med og foretrekker at dette gjennomgås tidlig. Boken er tilpasset en slik alternativ undervisningsplan:

Alternativ undervisningsplan

Selvstudium	Kapittel 0: Algebra
Repetisjon	Kapittel 1.1–1.3: Potenser, prosent- og renteregning
	Kapittel 2: Likninger og ulikheter
Kjernestoff	Kapittel 1.4–1.8: Finansmatematikk
	Kapittel 3–7: Resten av kjernestoffet

Etter hvert delkapittel er det en rekke øvingsoppgaver av varierende vanskelighetsgrad. Vi har valgt å ta med svar på oppgavene i kapittel 0 i denne boken, mens løsning av alle andre oppgaver kommer i en egen oppgavebok. Til sist i boken finnes noen eksamensoppgaver med fullstendig løsning.

Oversikt

Del I - Forberedende stoff

Kapittel 0 Algebra og algebraiske uttrykk 15

Del II - Kjernestoff

Kapittel 1 Finansmatematikk 41

Kapittel 2 Likninger og ulikheter 79

Kapittel 3 Funksjoner og grafer 105

Kapittel 4 Derivasjon 146

Kapittel 5 Integrasjon 194

Kapittel 6 Lineære likningssystemer og matriser 223

Kapittel 7 Funksjoner i flere variabler 265

Del III - Eksamensoppgaver

Kapittel 8 Eksamensoppgaver 311

Innhold

Del I - Forberedende stoff

Kapittel 0 Algebra og algebraiske uttrykk 15

- 0.1 Tall 16
- 0.2 Brøker 20
- 0.3 Potenser 23
- 0.4 Røtter 24
- 0.5 Parenteser 25
- 0.6 Algebraiske uttrykk 27
- 0.7 Algebraiske lover 28
- 0.8 Kvadratsetningene 30
- 0.9 Likninger 31

Del II - Kjernestoff

Kapittel 1 Finansmatematikk 41

- 1.1 Relativ vekst og vekstfaktorer 42
- 1.2 Potenser og potensregning 45
- 1.3 Renteregning 50
- 1.4 Nåverdi av kontantstrømmer 53
- 1.5 Endelige rekker 58
- 1.6 Annuiteter og annuitetslån 63
- 1.7 Uendelige rekker og grenseverdier 68
- 1.8 Eulers tall og kontinuerlig forrentning 74

Kapittel 2 Likninger og ulikheter 79

- 2.1 Lineære likninger 80
- 2.2 Kvadratiske likninger 81
- 2.3 Likninger med parametre 86
- 2.4 Polynomiale likninger 88
- 2.5 Polynomdivisjon 91
- 2.6 Faktorisering av polynomer 94
- 2.7 Andre algebraiske likninger 97
- 2.8 Ulikheter 101

Kapittel 3 Funksjoner og grafer 105

- 3.1 Funksjoner 106
- 3.2 Grafen til en funksjon 109
- 3.3 Lineære funksjoner og den rette linjen 113
- 3.4 Kvadratiske funksjoner og parabellen 116
- 3.5 Inntekts- og kostnadsfunksjoner 119
- 3.6 Voksende og avtagende funksjoner 122
- 3.7 Sirkler og ellipser 124
- 3.8 Polynomfunksjoner og nullpunkter 127
- 3.9 Rasjonale funksjoner og hyperbelen 128
- 3.10 Kontinuitet 134
- 3.11 Sammensatte og omvendte funksjoner 136
- 3.12 Eksponentialfunksjoner 140
- 3.13 Logaritmer 143

Kapittel 4 Derivasjon 146

- 4.1 Tangenter og den deriverte 147
- 4.2 Den deriverte funksjonen 152
- 4.3 Derivasjonsregler 153
- 4.4 Funksjoner som ikke er deriverbare 160
- 4.5 Implisitt derivasjon 163
- 4.6 Funksjonsdrøfting og den deriverte 166
- 4.7 Den annenderiverte og konveksitet 172
- 4.8 L'Hôpitals regel 178
- 4.9 Økonomiske anvendelser 180
- 4.10 Taylor-polynomer 184

Kapittel 5 Integrasjon 194

- 5.1 Antiderivasjon og ubestemte integraler 195
- 5.2 Integrasjonsregler 198
- 5.3 Substitusjon 200
- 5.4 Delvis integrasjon 203
- 5.5 Delbrøksoppspaltning 205
- 5.6 Bestemte integraler og arealberegning 211
- 5.7 Økonomiske anvendelser 219

Kapittel 6 Lineære likningssystemer og matriser 223

- 6.1 Likningssystemer 224
- 6.2 Lineære systemer og Gauss-eliminering 229
- 6.3 Løsninger av lineære systemer 237
- 6.4 Determinanter 241
- 6.5 Regning med matriser og vektorer 253
- 6.6 Inverse matriser 259

Kapittel 7 Funksjoner i flere variabler 265

- 7.1 Funksjoner i to variabler 266
- 7.2 Noen klasser av funksjoner 271
- 7.3 Partiellderivasjon 275
- 7.4 Optimering i to variabler 281
- 7.5 Andre anvendelser av de partiellderiverte 287
- 7.5 Optimering med bibetingelser 294

Del III - Eksamensoppgaver**Kapittel 8 Eksamensoppgaver 311**

- Matematikk for økonomer (HiBu 2004) 312
- Matematikk for siviløkonomer (BI 2015) 313
- Matematikk for siviløkonomer (BI 2015) 317
- Løsning av eksamensoppgaver 319